Lec 9 微分中值定理及应用习题课

9.1 达布定理（Darboux）

定理 9.1 (Darboux 定理)

设 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导, 则

1. $f'(x)$ 在 (a,b) 中无第一类间断点;
2. 即使 $f'(x)$ 在 (a,b) 中不连续,$f'(x)$ 在 (a,b) 中仍满足介值性与零值性.
3. 若 $f'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$, 则要么 $f'(x) > 0, \forall x \in (a,b)$, 要么 $f'(x) < 0, \forall x \in (a,b)$. ♡

证明 仅需证明介值性, 即对于任意 $f'(a) < \gamma < f'(b)$, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f'(\xi) = \gamma$.

不妨设 $f'(a) < f'(b)$。首先考虑特殊情况：$f'(a) < 0 < f'(b)$，即

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) < 0, \quad \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = f'(b) > 0.$$

所以存在在 $\delta_1 > 0$，使得当 $x \in (a, a+\delta_1)$ 时有 $f(x) - f(a) < 0$，即 $f(x) < f(a)$。同理，在 δ_2，使得当 $x \in (b-\delta_2, b)$ 时有 $f(x) - f(b) > 0$，注意到此时 $x \in (b-\delta_2, b)$，所以当 $x \in (b-\delta_2, b)$ 时，$f(x) < f(b)$。因此函数 $f(x)$ 的两个端点 a, b 不是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值。也就是说 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内部一点 ξ 取得最小值，依据 Fermat 定理有 $f'(\xi) = 0$。

对于一般情况，任取 $f'(a) < \gamma < f'(b)$，令 $g(x) = f(x) - \gamma x$，则 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导，且

$$g'(a) = f'(a) - \gamma < 0, \quad g'(b) = f'(b) - \gamma > 0,$$

所以在一点 $\xi \in (a,b)$ 使得 $g'(\xi) = \gamma$.

9.2 例题

例 9.1 证明:

1. $f(x)$ 在区间 I 上为常函数 $\Leftrightarrow f'(x) = 0, \forall x \in I$;
2. 若 $f'(x) > 0, \forall x \in I$, 则 $f(x)$ 在 I 上严格单调增加.

证明

1. $\Rightarrow f(x) = C \Rightarrow f'(x) = 0$;
   $\Leftarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi) = 0 \Rightarrow f(x) = f(a), \forall x \in I := [a,b]$.
2. $f'(x) > 0 \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\xi) > 0 \Rightarrow f(x) > f(y), \forall x > y$.

例 9.2 证明:

1. 若 f 在 x_0 处连续, 且 $f'(x)$ 在 x_0 两侧存在, 异号,$f'(x_0)$ 可以不存在, 则 $f(x_0)$ 为 f 的极值点;

2. 若 $f'(x_0)=0, f''(x_0)>0(<0)$, 则 $f(x_0)$ 必为 f 的极小值 (极大值) 点.
3. 若 $f'(x_0)=f''(x_0)=0, f'''(x_0)\neq 0$, 则 $f(x_0)$ 不是 f 的极值点.

证明

1. 不妨设 $f'(x)<0, \forall x\in(x_0-\delta_1,x_0)$,$f'(x)>0, \forall x\in(x_0,x_0+\delta_2)$, 则由上题结论,$f(x)$ 在 $(x_0-\delta_1,x_0)$ 上严格单调减少, 在 $(x_0,x_0+\delta_2)$ 上严格单调增加, 所以 $f(x_0)$ 为极小值点.
2. $f''(x_0)>0 \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}=f''(x_0)>0 \Rightarrow \exists\delta>0, \forall x\in(x_0-\delta,x_0), f'(x)<f'(x_0)=0, \forall x\in(x_0,x_0+\delta), f'(x)>f'(x_0)=0 \Rightarrow f(x_0)$ 为极小值点.
3. 依次讨论低阶导在邻域内的符号即可.

例 9.3 证明以下不等式:

1. $\dfrac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}<\tan\beta-\tan\alpha<\dfrac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}, 0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$;
2. $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x, x>0$.
3. $\tan x>x-\dfrac{x^3}{3}, 0<x<\dfrac{\pi}{2}$.
4. (a). $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x, 0<x<\dfrac{\pi}{2}$;
   (b). $x-\dfrac{x^3}{3!}<\sin x<x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}, 0<x<\dfrac{\pi}{2}$;
   (c). $x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}<\sin x<x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\dfrac{x^9}{9!}, 0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

证明

1. $\exists\xi\in(\alpha,\beta), \dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{\beta-\alpha}=\tan'\xi=\dfrac{1}{\cos^2\xi}\Rightarrow\dfrac{1}{\cos^2\alpha}<\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{1}{\cos^2\xi}<\dfrac{1}{\cos^2\beta}\Rightarrow\dfrac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}<\tan\beta-\tan\alpha<\dfrac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}$.
2. 仅证 $f(x)=x-\ln(1+x)>0$ 即可 (第一个 $<$ 代入 y , $1+y=\dfrac{1}{1+x}$ 即证).$f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}>0\Rightarrow f(x)>f(0)=0$.
3. 令 $f(x)=\tan x-x+\dfrac{x^3}{3}$. $f'(x)=\sec^2x-1+x^2=\tan^2x+x^2>0\Rightarrow f(x)>f(0)=0$.
4. 令 $g(x)=x-\sin x$. $g'(x)=1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}>0\Rightarrow g(x)>g(0)=0$.
   令 $h(x)=x-\sin x-\dfrac{x^3}{3!}, h'(x)=1-\cos x-\dfrac{1}{2}x^2, h''(x)=\sin x-x<0\Rightarrow h'(x)<h'(0)=0\Rightarrow h(x)<h(0)=0$. 其他的同理可证.

例 9.4 求 $f(x)=x^4-2x^2+5$ 在 $[-2,2]$ 上的最大值与最小值.

tips: 函数在 R 上连续可微, 则最值点要么是极值点要么边界点, 极值点处的导数为 0.

解 先求出所有的导数为 0 的点, 再求出边界点, 再求出这些点的函数值, 取最大值与最小值即可.

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x^2-1)=0\Rightarrow x=0,\pm1$.

$f(-2)=13, f(-1)=4, f(0)=5, f(1)=4, f(2)=13$.

所以最大值为 13，最小值为 4.

作业 ex3.3:4(4),17,19(1),21(2),25,26.